Solution 25:

$1°/ z' = \frac{(3+4i)}{5}\overline{z} + \frac{1-2i}{5} \Leftrightarrow x' + iy' = \frac{(3+4i)}{5}(x - yi) + \frac{1-2i}{5}$

$\Leftrightarrow x' + iy' = \frac{3x+4y}{5} + i\left(\frac{-3y+4x}{5}\right) + \frac{1-2i}{5}$

d'où $\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$

$2°/$ z' est de la forme $a\overline{z} + b$ où $a = \frac{3+4i}{5}$ et $b = \frac{1-2i}{5}$

$a \neq 0$ d'où f est une similitude indirecte de rapport $k = |a| = 1$

d'où f est un antidéplacement

Cherchons l'ensemble des points invariants par f

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 4y - 1 = 0$$

D'où f est la symétrie orthogonale d'axe $\Delta : y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$3°/ z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z') = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y - 2 = 0$

D'où : $D : 4x - 3y - 2 = 0$

$4°/$

$(2, 2)$ est solution de (*)

$4x - 3y = 2 \Leftrightarrow 4x - 3y = 4 \times 2 - 3 \times 2 \Leftrightarrow 4(x-2) = 3(y-2)$

$4 \wedge 3 = 1$ alors $x - 2 = 3k$ où $k \in \mathbb{Z}$

d'où $x = 2 + 3k$

$4(x-2) = 3(y-2) \Leftrightarrow 12k = 3(y-2) \Leftrightarrow y - 2 = 4k$